Universität Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik I

Frühjahrssemester 2019
Vorlesung 10
Prof. Dr. Katia Saporiti

Äquivalente All- und Existenzaussagen

Allausagen

Alles ist vergänglich.	$\forall x Px$	$\Leftrightarrow$	$\neg\exists x\neg Px$	Nichts ist nicht vergänglich.
Nichts währt ewig.	$\neg\exists x Px$	$\Leftrightarrow$	$\forall x\neg Px$	Alles währt nicht ewig.

Existenzaussagen

Nicht alles währt ewig.	$\neg\forall x Px$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\neg Px$	Manches währt nicht ewig.
Manches währt ewig.	$\exists x Px$	$\Leftrightarrow$	$\neg\forall x\neg Px$	Nicht alles währt nicht ewig.

Häufig vorkommende Quantifizierungen: Allaussagen

Alle P sind Q.

$\forall x(Px \rightarrow Qx)$ $\Leftrightarrow$ $\neg\exists x(Px \wedge \neg Qx)$

Kein P ist nicht Q.

Lies: Für alle Dinge gilt: Wenn etwas die Eigenschaft P hat, dann hat es auch die Eigenschaft Q.

Beispiel: Alle Diamanten sind hart.

Lies: Es gibt nichts, das die Eigenschaft P hat und die Eigenschaft Q nicht hat.

Beispiel: Kein Diamant ist nicht hart.

Kein P ist Q.

$\neg\exists x(Px \wedge Qx)$ $\Leftrightarrow$ $\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$

Alle P sind nicht Q.

Lies: Es gibt nichts, das die Eigenschaft P und die Eigenschaft Q hat.

Beispiel: Kein Diamant ist flüssig.

Lies: Für alle Dinge gilt: Wenn etwas die Eigenschaft P hat, dann hat es nicht die Eigenschaft Q.

Beispiel: Diamanten sind nicht flüssig.

Häufig vorkommende Quantifizierungen: Existenzaussagen

Einige P sind Q.

$\exists x(Px \wedge Qx)$ $\Leftrightarrow$ $\neg\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$

Nicht alle P sind nicht Q.

Lies: Es gibt etwas, das die Eigenschaft P und die Eigenschaft Q hat.

Beispiel: Manche Kinder sind frech.

Lies: Nicht alle Dinge, die die Eigenschaft P haben, haben die Eigenschaft Q nicht.

Beispiel: Nicht alle Kinder sind nicht frech.

Einige P sind nicht Q.

$\exists x(Px \wedge \neg Qx)$ $\Leftrightarrow$ $\neg\forall x(Px \rightarrow Qx)$

Nicht alle P sind Q.

Lies: Es gibt etwas, das die Eigenschaft P hat und die Eigenschaft Q nicht hat.

Bsp.: Einige Gemälde sind keine Fälschungen.

Lies: Nicht alle Dinge, die die Eigenschaft P haben, haben auch die Eigenschaft Q.

Bsp.: Nicht alle Gemälde sind Fälschungen.

Prädikatenlogischer Baumkalkül: Erweiterungsregeln

Für die Konstruktion eines systematischen Baums für eine PL-Formel gelten dieselben Regeln wie im aussagenlogischen Baumkalkül. Nachdem die Negation einer zu beweisenden Formel als Ursprung gesetzt wurde, wird der Baum wie folgt erweitert ...

(1) Wenn eine α-Formel auf einem offenen Ast vorkommt, werden α_1 und α_2 untereinander angehängt.

$$\alpha$$
$$|$$
$$\alpha_1$$
$$\alpha_2$$

α	α_1	α_2
$\Gamma \wedge \Delta$	Γ	Δ
$\neg(\Gamma \vee \Delta)$	$\neg\Gamma$	$\neg\Delta$
$\neg(\Gamma \rightarrow \Delta)$	Γ	$\neg\Delta$
$\neg\neg\Gamma$	Γ	Γ

(Senkrechte Striche können weggelassen werden. Bei der Auflösung einer doppelten Negation, genügt es, α_1 oder α_2 anzuhängen.)

(2) Wenn eine β-Formel auf einem offenen Ast vorkommt, werden β_1 und β_2 nebeneinander angehängt.

$$\beta$$
$$\beta_1 \qquad \beta_2$$

β	β_1	β_2
$\neg(\Gamma \wedge \Delta)$	$\neg\Gamma$	$\neg\Delta$
$\Gamma \vee \Delta$	Γ	Δ
$\Gamma \rightarrow \Delta$	$\neg\Gamma$	Δ
$\Gamma \leftrightarrow \Delta$	Γ Δ	$\neg\Gamma$ $\neg\Delta$
$\neg(\Gamma \leftrightarrow \Delta)$	Γ $\neg\Delta$	$\neg\Gamma$ Δ

... und zwei weitere Regeln für All- und Existenzsätze

(3) Wenn eine γ-Formel (ein Allsatz) auf einem offenen Ast vorkommt, wird $\gamma_{(\alpha)}$ angehängt.

$$\gamma$$
$$|$$
$$\gamma_{(\alpha)}$$

γ	$\gamma_{(\alpha)}$
$\forall\xi(\Gamma)$	Γ^{α}_{ξ}
$\neg\exists\xi(\Gamma)$	$\neg\Gamma^{\alpha}_{\xi}$

Die ***Allbeseitigung*** ist wiederholbar. Die Konstante (α) darf frei gewählt werden.

(4) Wenn eine δ-Formel (ein Existenzsatz) auf einem offenen Ast vorkommt, wird $\delta_{(\alpha)}$ angehängt.

$$\delta$$
$$|$$
$$\delta_{(\alpha)}$$

δ	$\delta_{(\alpha)}$
$\exists\xi(\Gamma)$	Γ^{α}_{ξ}
$\neg\forall\xi(\Gamma)$	$\neg\Gamma^{\alpha}_{\xi}$

Die ***Existenzbeseitigung*** darf nur einmal vorgenommen werden. Die Konstante (α) muss neu sein.

Beispiel (1): Beweis für $\vdash \forall y(\forall x Px \rightarrow Py)$

(δ-Formel)	**1.**	$\neg\forall y(\forall x Px \rightarrow Py)$	✓ *Negation der zu beweisenden Formel (NdF)*
(α-Formel)	**2.**	$\neg(\forall x Px \rightarrow Pa)$	✓ *EB aus 1. (a neu!)*
(γ-Formel)	**3.**	$\forall x Px$	✓ *aus 2.*
	4.	$\neg Pa$	*aus 2.*
	5.	Pa	*AB aus 3.*
		×	

Beispiel (2): Beweis für $\vdash \forall x Px \rightarrow \exists x Px$

(α-Formel)	**1.**	$\neg(\forall x Px \rightarrow \exists x Px)$	✓ *Negation der Formel (NdF)*
(γ-Formel)	**2.**	$\forall x Px$	✓ *aus 1.*
(γ-Formel)	**3.**	$\neg\exists x Px$	✓ *aus 1.*
	4.	Pa	*AB aus 2.*
	5.	$\neg Pa$	*AB aus 3.*
		×	

Die Allbeseitigung (Beispiele)

γ	$\forall\xi(\Gamma)$	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	$\forall x(Px \rightarrow Qy)$
$\gamma(\alpha)$	Γ^{α}_{ξ}	$Pa \rightarrow Qa$	$Pa \rightarrow Qy$
γ	$\neg\exists\xi(\Gamma)$	$\neg\exists x(Px \rightarrow Qx)$	$\neg\exists x(Py \rightarrow Qx)$
$\gamma(\alpha)$	$\neg\Gamma^{\alpha}_{\xi}$	$\neg(Pa \rightarrow Qa)$	$\neg(Py \rightarrow Qa)$

γ	$\forall xPxyz$	$\forall y(Py \rightarrow Qy)$	$\forall z(Pz \rightarrow Qy)$
$\gamma(\alpha)$	$Payz$	$Pa \rightarrow Qa$	$Pa \rightarrow Qy$
γ	$\cancel{\forall xQx \rightarrow Px}$	$\neg\exists y(Py \rightarrow Qy)$	$\neg\exists y(Px \rightarrow Qy)$
$\gamma(\alpha)$	$\neg\forall xQx$ Px	$\neg(Pa \rightarrow Qa)$	$\neg(Px \rightarrow Qa)$

keine γ-Formel, sondern eine β-Formel !!

Die Existenzbeseitigung (Beispiele)

Konstante neu! neu!!!

δ	$\exists\xi(\Gamma)$	$\exists x(Px \wedge Qx)$	$\exists x(Py \wedge Qx)$
$\delta_{(\alpha)}$	Γ^{α}_{ξ}	$Pa \wedge Qa$	$Py \wedge Qa$
δ	$\neg\forall\xi(\Gamma)$	$\neg\forall x(Px \wedge Qx)$	$\neg\forall x(Px \wedge Qy)$
$\delta_{(\alpha)}$	$\neg\Gamma^{\alpha}_{\xi}$	$\neg(Pa \wedge Qa)$	$\neg(Pa \wedge Qy)$

Konstante neu! neu!!!

Konstante neu! Neu !! neu!!!

δ	$\exists x\forall yQxya$	$\exists y(Py \wedge Qab)$	$\exists x\exists y\exists z((Py \wedge Qx) \wedge Rz)$
$\delta_{(\alpha)}$	$\forall yQbya$	$Pc \wedge Qab$	$\exists y\exists z((Py \wedge Qa) \wedge Rz)$
δ	$\exists x(Px \wedge Qa)$	$\neg\forall z(Pz \wedge Qz)$	$\neg\forall y(Pa \wedge Qyx)$
$\delta_{(\alpha)}$	$Pb \wedge Qa$	$\neg(Pa \wedge Qa)$	$\neg(Pa \wedge Qbx)$

Die Konstante muss neu sein. (Sie darf auf dem Ast nicht vorkommen, der erweitert wird.) Also nicht Pa∧Qa !

Alle durch den Quantor gebundenen Vorkommnisse der Variablen müssen durch dieselbe Konstante ersetzt werden! Also nicht etwa ¬(Pa∧Qb) !

Konstante neu! neu!!!

Zur Allbeseitigung

- Die Allbeseitigung ist beliebig oft durchführbar, weil das, was ausgesagt wird, für alle betrachteten Individuen gelten muss.
- Man kann die entsprechende Allformel im Baum also mehrmals entwickeln
- und darf dabei jeweils *eine* beliebige Individuenkonstante einsetzen.
- Allerdings müssen dabei jeweils alle durch den beseitigten Quantor gebundenen Vorkommnisse der Variable durch dieselbe Individuenkonstante ersetzt werden.
- Häufig ist es beim Konstruieren eines Baums von Nutzen, bei einer Allbeseitigung diejenigen Individuenkonstanten zu verwenden, die vorher durch eine Existenzbeseitigung eingeführt wurden.
- Vergessen Sie bei der Allbeseitigung einer negierten Existenzaussage das Negationszeichen nicht! (Das ist ein häufig auftretender Fehler.)

Zur Existenzbeseitigung

- Die Existenzbeseitigung darf nur einmal durchgeführt werden, weil das, was ausgesagt wird, nur für mindestens ein Individuum gilt.
- Man darf die entsprechende Formel im Baum deshalb nur einmal entwickeln,
- und die dabei eingesetzte Individuenkonstante muss neu sein. (D.h. sie darf auf dem Ast, der mit der Existenzbeseitigung erweitert wird, noch nicht vorkommen.)
- Denn es ist weder garantiert, dass das, was in der jeweiligen Existenzbehauptung von einem Individuum ausgesagt wird, von mehr als nur einem Individuum gilt, noch dass es von gerade einem der Individuen gilt, über die bereits andere Aussagen getroffen wurden. Es ist nicht garantiert, dass es ein Individuum gibt, auf das sowohl die zuvor gemachten Aussagen zutreffen, als auch die mit der zu entwickelnden Existenzaussage gemachte Aussage.
- Es empfiehlt sich, bei der Konstruktion eines Baumes die Existenzbeseitigung vor der Allbeseitigung vorzunehmen.
- Vergessen Sie bei der Existenzbeseitigung einer negierten Allaussage das Negationszeichen nicht! (Das ist ein häufig auftretender Fehler.)

Beispiel (3): Beweis für $\forall x(Px \rightarrow Qx) \Rightarrow (\forall xPx \rightarrow \forall xQx)$

(α-Formel)	**1.**	$\neg(\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall xPx \rightarrow \forall xQx))$	✓	*Negation der Formel (NdF)*
(γ-Formel)	**2.**	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	✓	*aus 1*
(α-Formel)	**3.**	$\neg(\forall xPx \rightarrow \forall xQx)$	✓	
(γ-Formel)	**4.**	$\forall xPx$	✓	*aus 3*
(δ-Formel)	**5.**	$\neg\forall xQx$	✓	
	6.	$\neg Qa$		*EB aus 5 „a" neu!*
(β-Formel)	**7.**	$Pa \rightarrow Qa$	✓	*AB aus 2*
	8.	Pa		*AB aus 4*
	9.	$\neg Pa$ ✗ Qa ✗		*aus 7*

Fin